

走近数学世界 培育数学素养

席南华

数学是一个极富魅力的世界。在人类认识自然、追求美好生活的过程中,数学发挥着重要作用。虽然不懂数学也能过得很愉快,但具备一定的数学素养,能帮助我们更好地认识世界、理解世界、欣赏世界。

数学,古老又年轻。在信息时代,数学的重要性与日俱增,展现出前所未有的活力。推动数学发展的,既有大量未解决的旧问题,也有社会科技发展涌现的新问题,从事数学研究和应用的人数也在不断增加。

数学的内涵是什么

数学研究量与形,量与形是物质的基本属性,这决定了数学的价值和意义。经过几千年的发展,数学已经成为一个庞大的学科,通常分为基础数学(即纯数学)和应用数学两大部分。基础数学又大致可分为代数(含数论)、几何(含拓扑)、分析数学(以微积分为基础)等。

毫无疑问,数的起源是计数,也就是数物品。开始时,人们对数的观念与具体事物联系在一起,比如一棵树、一块石头、两个人、两条鱼等。逐渐地,人们发现一棵树、一块石头等具体事物共同的数字属性,数的抽象概念就这样形成了。

产生数的方式是无穷无尽的,量的比值是数,面积是数,体积是数,温度是数,时间是数……今天我们能强烈感受到数字化的影响,其实数字化很久以前就有了,如门牌号、车牌号、车次等。数字化的本质是编码,赋予数字以含义。例如一幅照片的数字化就是把照片分成很多小方块,每一个小方块看作一点,用三个数字表示其红绿蓝的成分。所谓像素就是这样的小方块的个数,像素越高,表明数字化做得越精细。重要的是,数字可以运算,经过数字化后,照片也就可以通过数学的手段进行变化了。

数,有无穷的魅力、奥秘和神奇,始终吸引着最富智慧的数学家和业余爱好者。研究数的分支是数论,这一领域一直很活跃,近年来取得巨大进展,包括费马大定理的证明、孪生素数猜想的突破、朗兰兹纲领的进展等。素数是数论研究的一个永恒主题,其神秘的结构和规律始终挑战着人类的智力。

形是数学分支几何关注的对象。这个世界充满了各种各样的形,蓝天、白云、青山、流水、高楼、

动物、植物有各自的形,它们都富有美感、令人愉悦。公元前300多年,希腊人欧几里得采用公理化体系,系统整理了古希腊人的数学成就,写成了《几何原本》。在以后2000多年的历史中,它都是一部标准的教科书。一直到19世纪,人们都相信这种几何准确描述了我们这个世界。但是,非欧几何的出现让人们知道几何原来可以有很多种。这立即带来一个问题,哪一种几何能正确描述我们世界的空间呢?广义相对论说我们生活的空间是弯曲的,需要用黎曼几何描述,弦论则认为我们的时空是十维的。

现实空间远比欧几里得几何中的空间复杂。当把几何理解为一种结构,就摆脱了几何是现实空间的抽象这个限制,几何的内涵会变得异常丰富和辽阔。很多对象都出人意料地有非常好的几何结构,如一个空间所有过原点的直线全体的几何结构就是射影空间。

现实世界日新月异,充满变化。微积分就是研究变化的数学,基本概念有极限、微分和积分。微积分及在其基础上发展起来的分析数学,成为认识和探索世界奥秘最有力的数学工具之一,为数学带来全面的大发展。

求解方程一直强有力地推动数学的发展。刚开始是多项式方程,在探究多项式方程的过程中,代数数论、代数、代数几何等分支产生了。微积分出现后,微分方程也就自然出现了。求解微分方程在数学中非常重要,因为大自然的很多奥秘是通过微分方程呈现的,著名的有描写流体运动的纳维-斯托克斯方程、描写电磁运动的麦克斯韦方程、广义相对论中的爱因斯坦场方程、量子力学中的薛定谔方程等。

应用数学和数学与其他学科交叉

应用数学是数学的重要组成部分。在20世纪以前,虽然很多数学工作与实际应用密切相关,但应用数学这个名称用得很少,并没有形成特别有影响的独立分支。进入20世纪后,应用数学快速成长,出现了计算数学、运筹学、控制论、组合数学、博弈论、信息论、数理统计等多个应用数学分支。计算机的出现进一步推动应用数学发展,还产生了很多交叉方向,如计算机数学、人工智能等。生物科学的迅速发展也涌现很多数学问题,现在有生物数学这一交叉分

支,它关注的是用数学模型理解生物现象。物理一直是数学发展的强大推动力量。在20世纪,数学物理成为数学的一个重要分支,在过去几十年间非常活跃,成果显著。它主要关注规范场论、量子场论、弦论、统计物理等领域的数学问题。

我们现在非常强调交叉,原因在于不同学科其实是现实不同侧面的反映,只有结合起来,我们才能对现实有更全面的认知。就像“盲人摸象”,每个学科可能只摸到一个局部、一个侧面,把所有的部分合起来,才会形成完整的“象”。在不同分支、不同学科交叉的过程中,数学也在不断产生新的概念、方法、理论等。

如今人类社会正步入人工智能时代,数学在其中起到的作用更是基础性的。计算数学、优化、统计等数学分支发挥突出作用,数论、微分几何等更多数学分支也不可或缺。人工智能也有力促进了数学的发展并提出很多极具挑战的数学问题,其中之一是人工智能的数学基础,如面向大数据的统计学基础、人工智能大模型的数学机理等。

培育和提升大众数学素养

在现代社会,数学素养已经成为公民的基本素养,世界各国都非常重视。数学有助于培养人的逻辑推理能力,因为数学的大厦是通过逻辑支撑的,逻辑把数学不同的内容组织在一起。当然,数学中的逻辑主要是演绎和归纳,是形式逻辑,现实的逻辑要复杂得多,仅有形式逻辑是不够的。

对学习数学而言,尤为重要的是获得数学思维。掌握了数学的思维方式、知道怎么考虑问题等,比单纯获得数学知识要更有价值得多。数学直觉是数学思维的重要组成部分。欧拉解决哥尼斯堡七桥问题的思维可以说是数学思维的典型例子,欧拉把陆地抽象成点,桥抽象成线段,从而揭示问题的数学本质,进而解决问题。

培养数学素养,最好还能了解数学的发展史,它能帮助我们深入认识数学。从数学史中我们可以了解到数学的发展历程一点都不枯燥,虽探索艰辛却充满了有趣的故事、生动的人物、引人入胜的例子。比如,数学史上关于数与形的观念变化就很有意思,无理数、负数、虚数都经历了一个漫长曲折的接受过程。

理解数学符号体系的意义也很重要。恰当的符号体系价值巨大,数学发展史上经常出现记号与数学理论进展密不可分的情况。莱布尼茨在微积分中引入的记号就是一个典范。在16世纪以前,几乎没人考虑过在代数领域系统使用符号,致使代数发展缓慢;16世纪法国数学家韦达在这方面作出了突出贡献,此后代数思想才得以更有效地表达。

在数学的发展过程中,很多数学家的哲学观也产生了深远影响。毕达哥拉斯学派认为“万物皆数”“数统治着宇宙”,柏拉图学派认为“纯粹思想的最高形式是数学”,高斯说“数学是科学的皇后”,等等。这些观点对科学文化有巨大影响,很多杰出的科学家,甚至人文学者对数学都有一种敬畏。数学家研究数学时的心理活动和背后的出发点同样很有意思。比如,笛卡尔创立解析几何(即坐标几何)与他的批判精神是分不开的。他说:“我决心离弃仅有抽象的几何,即仅为练习头脑设立问题的几何;这样做,是为了研究另一种几何,旨在自然现象的解释。”

好的科普作品对提高大众的数学素养非常重要。许多国家都重视数学科普,除了专门的科普工作者,还有很多杰出的学者也投身其中,推出形式多样的高质量科普作品,让大众觉得数学有趣、可亲,没那么神秘,可以为普通人所理解。这方面我们还有提升空间。

(作者为中国科学院院士、中国数学会理事长)

制图:沈亦伶

推荐读物:

《大哉数学之为用——华罗庚科普著作选集》:华罗庚著;上海教育出版社出版。

《认识数学》:席南华主编;科学出版社出版。

《悠扬的素数》:马库斯·杜·索托伊著,柏华元译;人民邮电出版社出版。

《什么是数学——对思想和方法的基本研究》:R·柯朗、H·罗宾著,I·斯图尔特修订,左平、张饴慈译;复旦大学出版社出版。